夏期理系演習 (発展) 演習 5・2

n は正の整数とし，$\dfrac{\pi}{2n} < x < \dfrac{\pi}{n}$ の範囲の x に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+x}$$

と定める.

(1) $f_n(x)$ が $x = \theta_n$ で最小となるような θ_n がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ.

(3) (**追加！**) (2) の極限値を α とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(n\theta_n - \alpha)$ を求めよ.

解 答

(1)
$$f_n'(x) = \frac{-n(1+x)\sin nx - \cos nx}{(1+x)^2}$$

この分子を

$$g_n(x) = -n(1+x)\sin nx - \cos nx$$

とおく。$\left(\dfrac{\pi}{2n} < x < \dfrac{\pi}{n}\right)$

$$g_n'(x) = -n^2(1+x)\cos nx$$

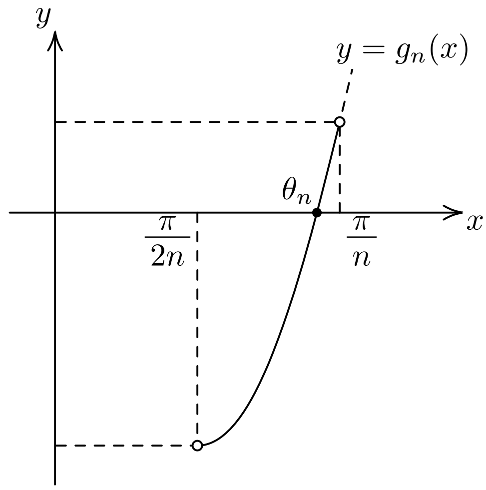
$\dfrac{\pi}{2} < nx < \pi$ より、$\cos nx < 0$ であるから

$$g_n'(x) > 0$$

よって、$g_n(x)$ は単調増加であり、

$$g_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -n\left(1+\frac{\pi}{2n}\right) < 0$$

$$g_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = -\cos n\pi = 1 > 0$$



以上より、

$$g_n(\theta_n) = 0 \quad \left(\frac{\pi}{2n} < \theta_n < \frac{\pi}{n}\right)$$

を満たす θ_n がただ 1 つ存在し、$x = \theta_n$ の前後で $g_n(x)$ の符号が負から正へ変わる。

$g_n(x)$ と $f_n'(x)$ は符号が一致するので、$f_n(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\left(\frac{\pi}{2n}\right)$	$\cdots$	θ_n	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{n}\right)$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、$f_n(x)$ を最小にする $x = \theta_n$ がただ 1 つ存在する。

(2) $g_n(\theta_n)=0$ であるから

$$-n(1+\theta_n)\sin n\theta_n-\cos n\theta_n=0$$

$$\therefore\quad \sin n\theta_n=-\frac{\cos n\theta_n}{n(1+\theta_n)}\qquad\cdots①$$

$$-1\leqq\cos n\theta_n\leqq 1,\quad \frac{\pi}{2n}\leqq\theta_n\leqq\frac{\pi}{n}$$

より

$$-\frac{1}{n\left(1+\frac{\pi}{n}\right)}\leqq-\frac{\cos n\theta_n}{n(1+\theta_n)}\leqq\frac{1}{n\left(1+\frac{\pi}{n}\right)}$$

$n\to\infty$ とすると、両辺とも 0 に収束するので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{\cos n\theta_n}{n(1+\theta_n)}\right\}=0$$

① より

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\theta_n=0$$

これと、$\dfrac{\pi}{2}\leqq n\theta_n\leqq\pi$ より

$$\underline{\lim_{n\to\infty}n\theta=\pi}$$

(3) (2) より、$\alpha=\pi$ である。

$$\beta_n=n\theta-\pi$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0\qquad\cdots②$$

ポイント

β_n を定めることにより、

$$\lim_{n\to\infty}n(n\theta_n-\pi)=\lim_{n\to\infty}n\beta_n$$

となる。右辺の方が見やすいので計算の方針が立てやすい。

$n\theta_n=\beta_n+\pi$ と① より

$$\sin(\beta_n+\pi)=-\frac{\cos(\beta_n+\pi)}{n+\beta_n+\pi}$$

$$\therefore\quad -\sin\beta_n=\frac{\cos\beta_n}{n+\beta_n+\pi}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad n\beta_n\cdot\frac{\sin\beta_n}{\beta_n}&=-\frac{n\cos\beta_n}{n+\beta_n+\pi}\\&=-\frac{\cos\beta_n}{1+\dfrac{\beta_n+\pi}{n}}\end{aligned}\qquad\cdots③$$

$n\to\infty$ とすると、② より

$$\frac{\sin\beta_n}{\beta_n}\to 1,\quad \cos\beta_n\to 1$$

となり、③ より

$$\lim_{n\to\infty}n\beta_n=-1$$

つまり、

$$\underline{\lim_{n\to\infty}n(n\theta_n-\pi)=-1}$$