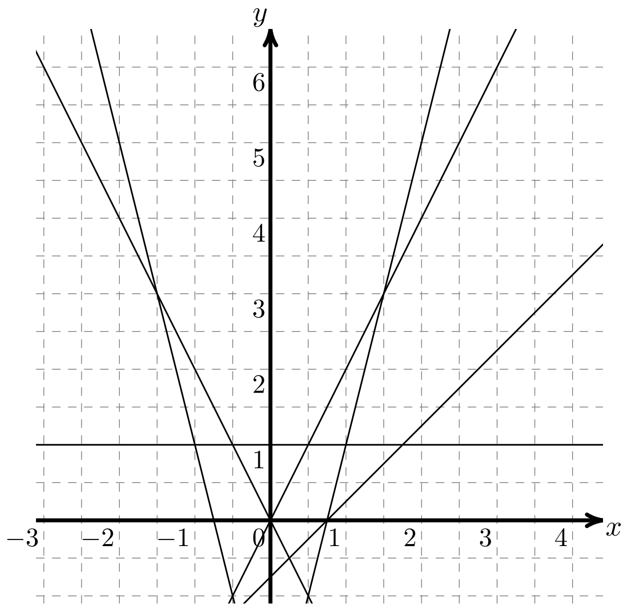
1. 通過領域の例

【例題】　t が実数全体を動くとき、xy 平面上の直線 $l: y = 2tx - t^2 + 1$ が通過する領域を図示せよ。

(1) $t = 0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ 2,\ -1,\ -2$ のときの直線 l を，描け．

解 答



(2)　l が点 $(2,4)$ を通過するような実数 t は存在するか？　理由をつけて答えよ．また、l が点 $(0,2)$ を通過するような実数 t は存在するか？

解 答

l が点 $(2,4)$ を通過するのは、

$$4 = 4t - t^2 + 1$$

となるときであり、

$$t^2 - 4t - 3 = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{7}$$

よって、l が 点 $(2,4)$ を通過することは ある。

l が点 $(0,2)$ を通過するのは、

$$2 = -t^2 + 1$$

となるときであり、

$$t^2 = -1$$

このような実数 t は存在しない。

よって、l が点 $(0,2)$ を通過することは ない。

(3)　t が実数全体を動くときに，直線 l が通過する領域を求め，図示せよ．

解 答

$$
\begin{aligned}
l : y &= 2tx - t^2 + 1 \\
\iff y &= -(t-x)^2 + x^2 + 1 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで、

$$C : y = x^2 + 1 \quad \cdots ②$$

とおく。

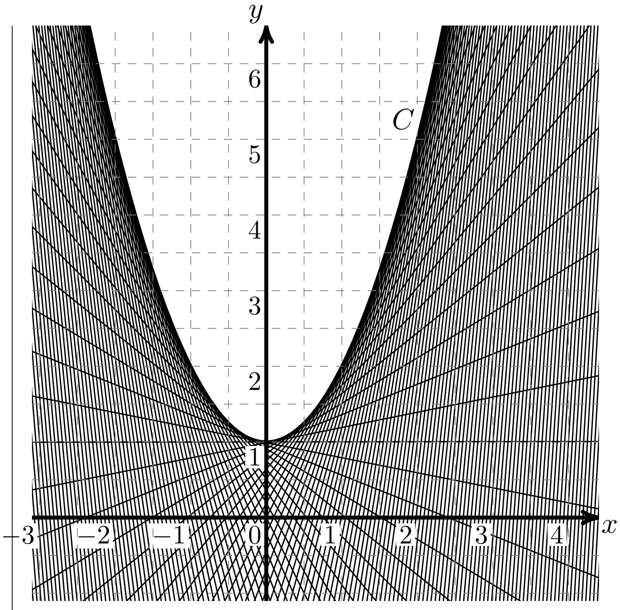
C と l の共有点の x 座標は、① − ② より

$$0 = -(t-x)^2$$

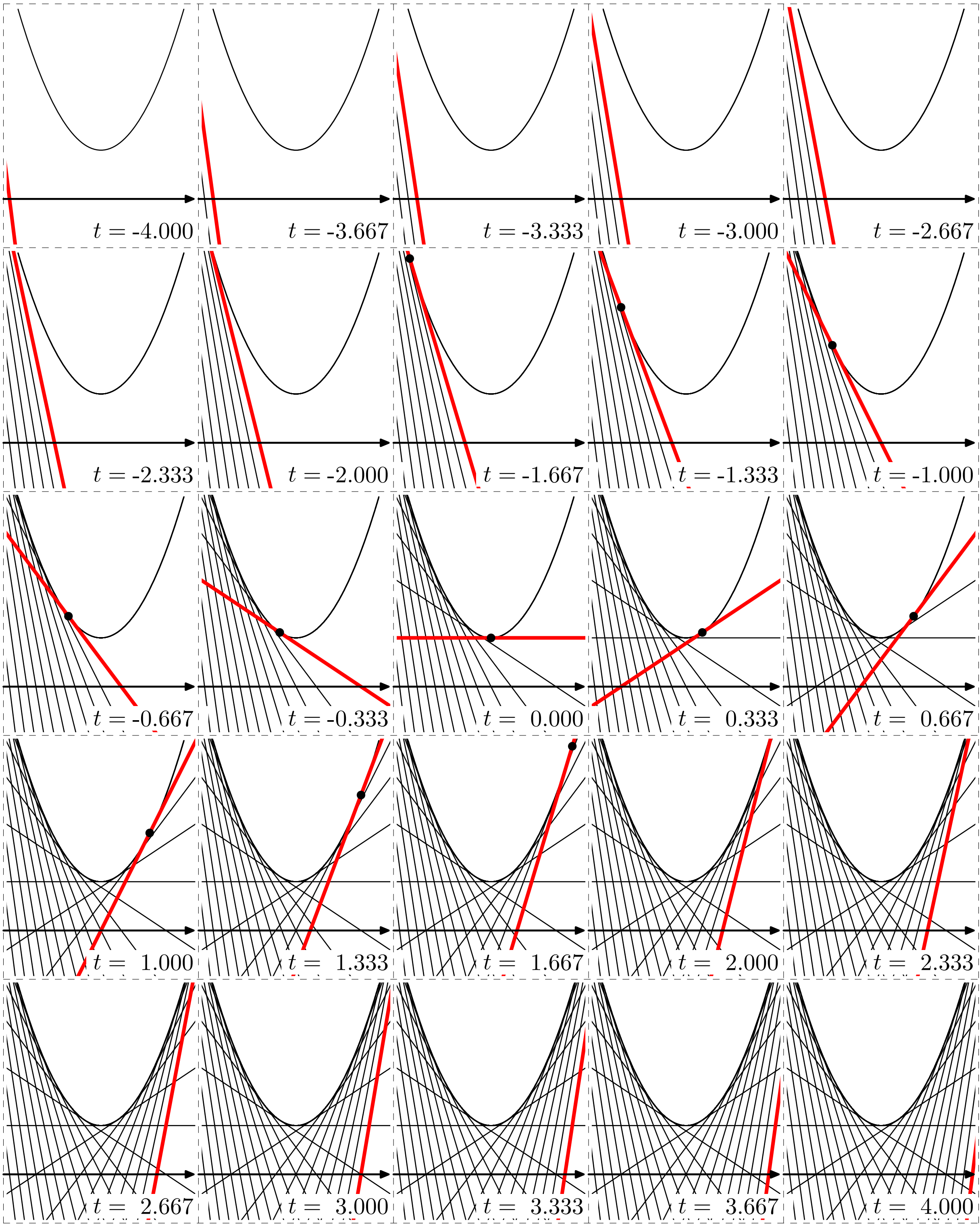
$$\therefore \quad x = t \text{ (重解)}$$

よって、この点で C と l は接する。

t を実数全体で動かすと (動く様子のパラパラ漫画は次ページ)、l の通過領域は次の図の斜線部になる。(境界を含む)



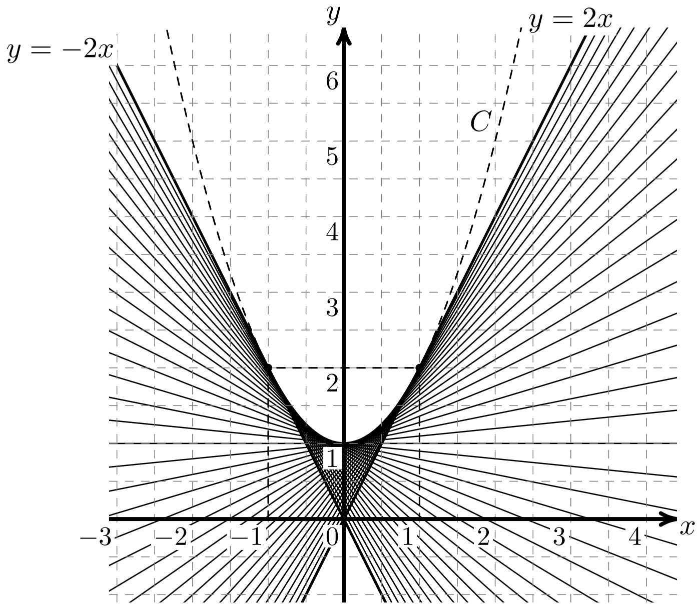
〜例題の (3) のパラパラ漫画〜　図の放物線は $C: y = x^2 + 1$、太線は $l: y = 2tx - t^2 + 1$。C と l は $x = t$ の点で接している。(● は接点)



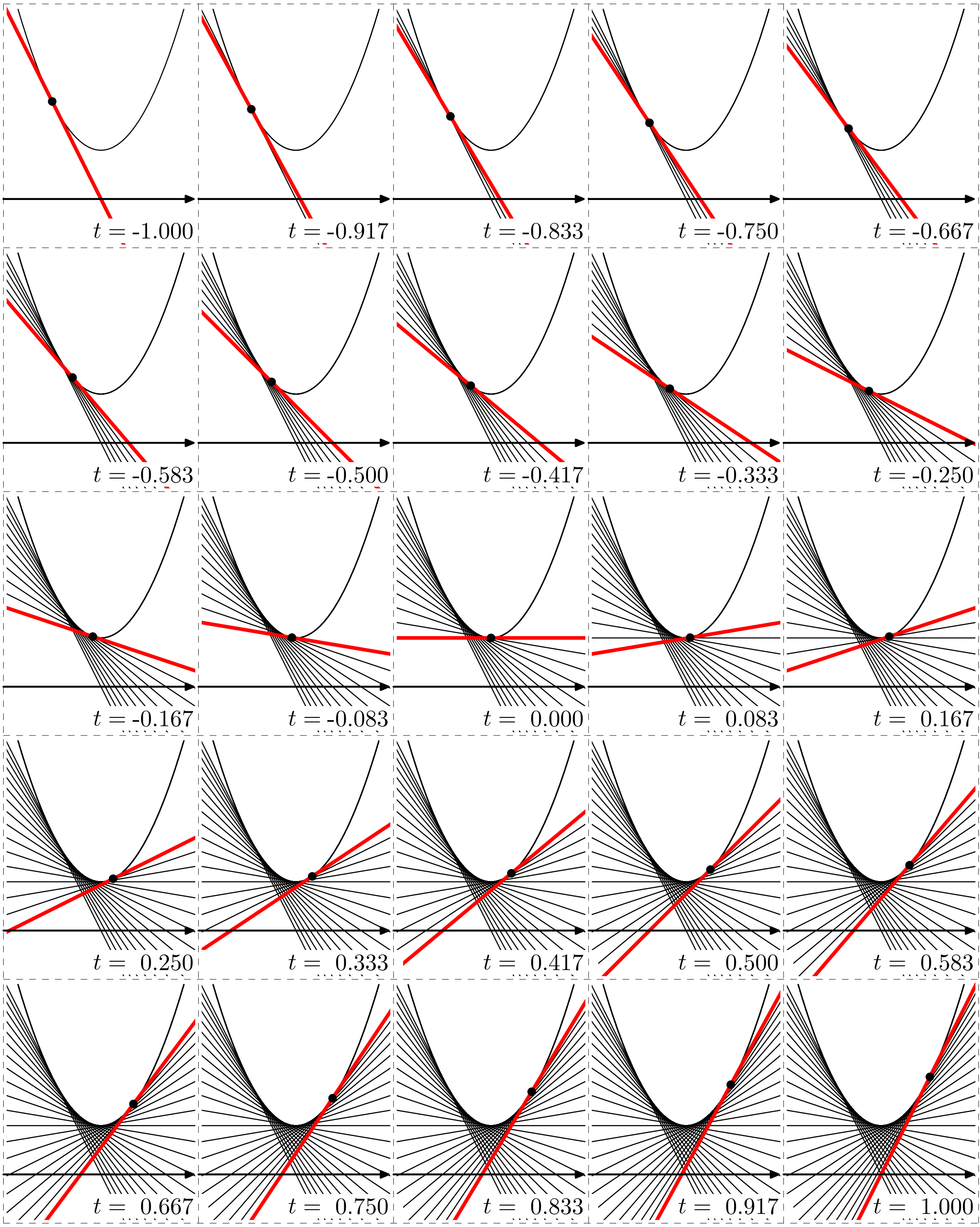
(4)　t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を満たして動くときに，直線 l が通過する領域を求め，図示せよ．

解 答

$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で t を動かすと、l が $x = t$ の点で C と接しながら動くので (動く様子のパラパラ漫画は次ページ)、l の通過領域は次の図の斜線部になる。(境界を含む) 、その通過領域は、次の図の斜線部となる。(境界を含む)



〜例題の (4) のパラパラ漫画〜　図の放物線は $C : y = x^2 + 1$、赤い太線は $l : y = 2tx - t^2 + 1$。C と l は $x = t$ の点で接している。(● は接点)



4. 包絡線を使ってみよう

問 1. (名大 (改))

t が $0 \leqq t \leqq 4$ の範囲を動くとき、

$$\text{直線 } l : y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} + 2$$

の通過領域を求め、図示せよ。

解 答

$$\begin{aligned} l :& y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} + 2 \\ \iff& y = -\frac{1}{4}(t^2 - 2xt) + 2 \\ \iff& y = -\frac{1}{4}(t - x)^2 + \frac{1}{4}x^2 + 2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで、

$$C : y = \frac{1}{4}x^2 + 2 \quad \cdots ②$$

とおく。

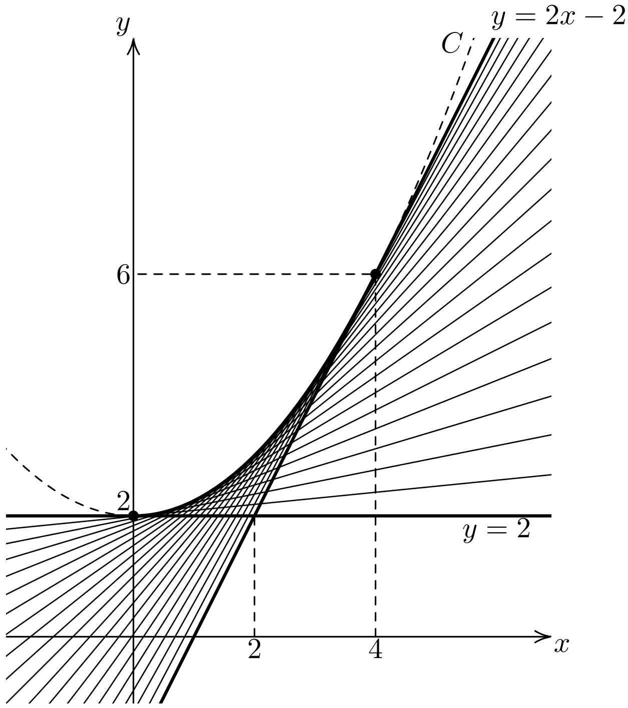
C と l の共有点の x 座標は、① − ② より

$$0 = -\frac{1}{4}(t - x)^2$$

$$\therefore \quad x = t \ (\text{重解})$$

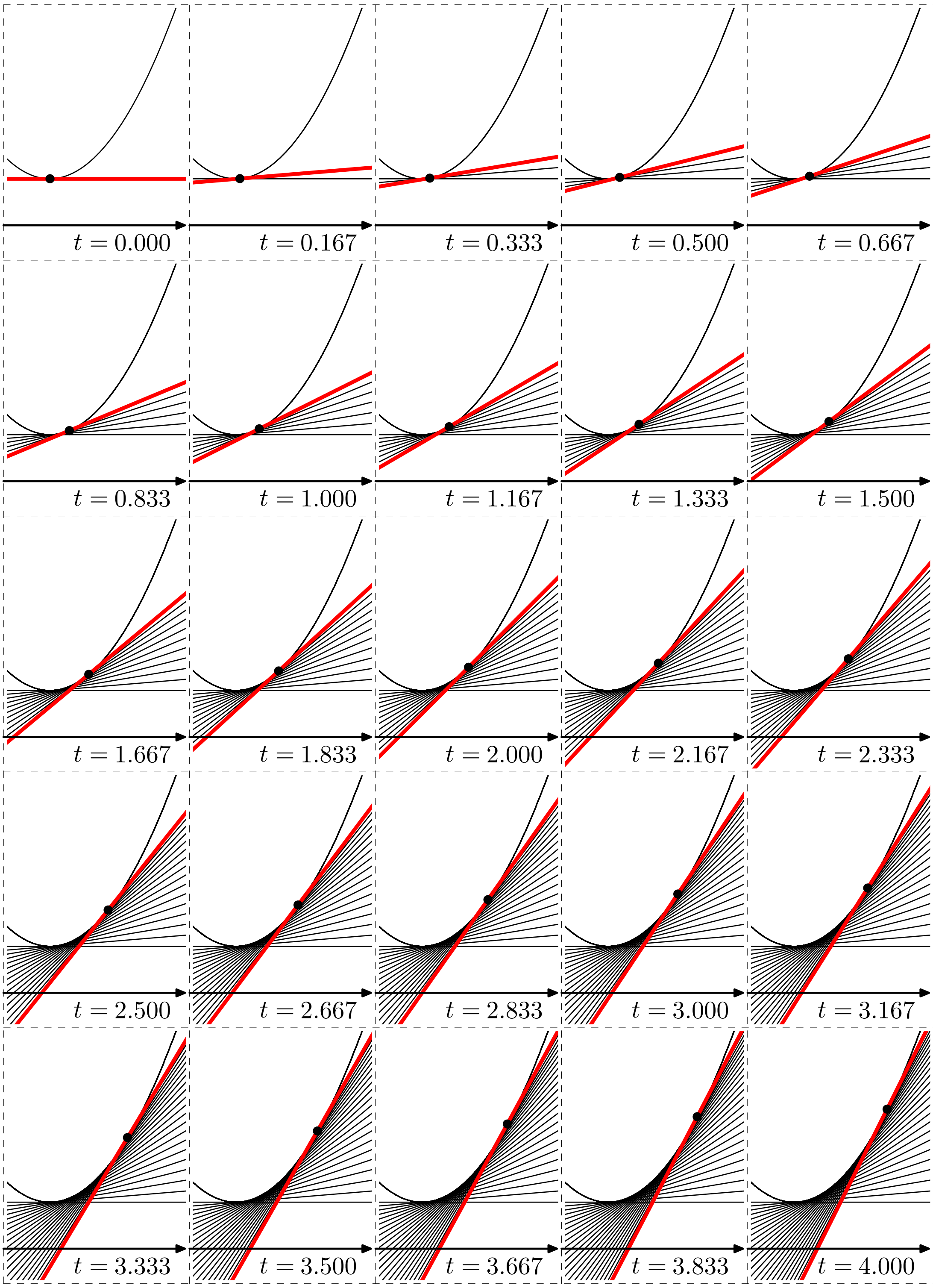
よって、この点で C と l は接する。

t を $0 \leqq t \leqq 4$ で動かすと (動く様子のパラパラ漫画は次ページ)、l の通過領域は次の図の斜線部になる。(境界を含む)



〜問 1 のパラパラ漫画〜

図の放物線は $C : y = \dfrac{1}{4}x^2 + 2$、赤い太線は $l : y = 2tx - \dfrac{1}{4}t^2 + 2$。
C と l は $x = t$ の点で接している。(● は接点)



問 2.

直線 $l : y = 2tx + t^2 - 1$ について、$0 \leqq t \leqq 1$ のとき、l の通過領域を図示せよ.

解 答

$$l : y = 2tx + t^2 - 1$$
$$\iff y = (t + x)^2 - x^2 - 1 \qquad \cdots ①$$

ここで、

$$C : y = -x^2 - 1 \qquad \cdots ②$$

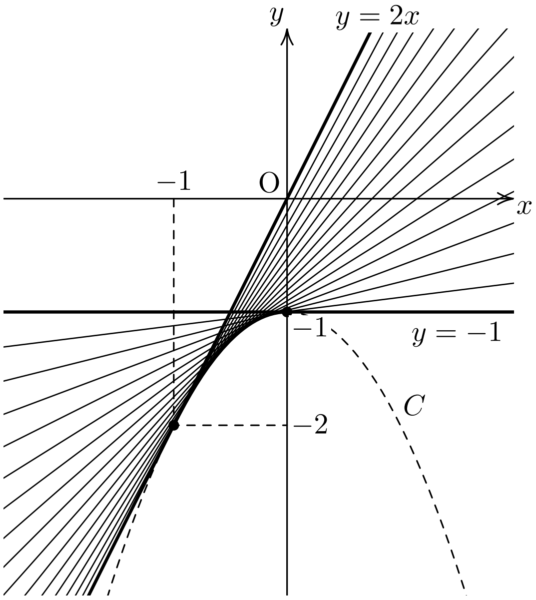
とおく。

C と l の共有点の x 座標は、① − ② より

$$0 = (t + x)^2$$
$$\therefore \quad x = -t \text{ (重解)}$$

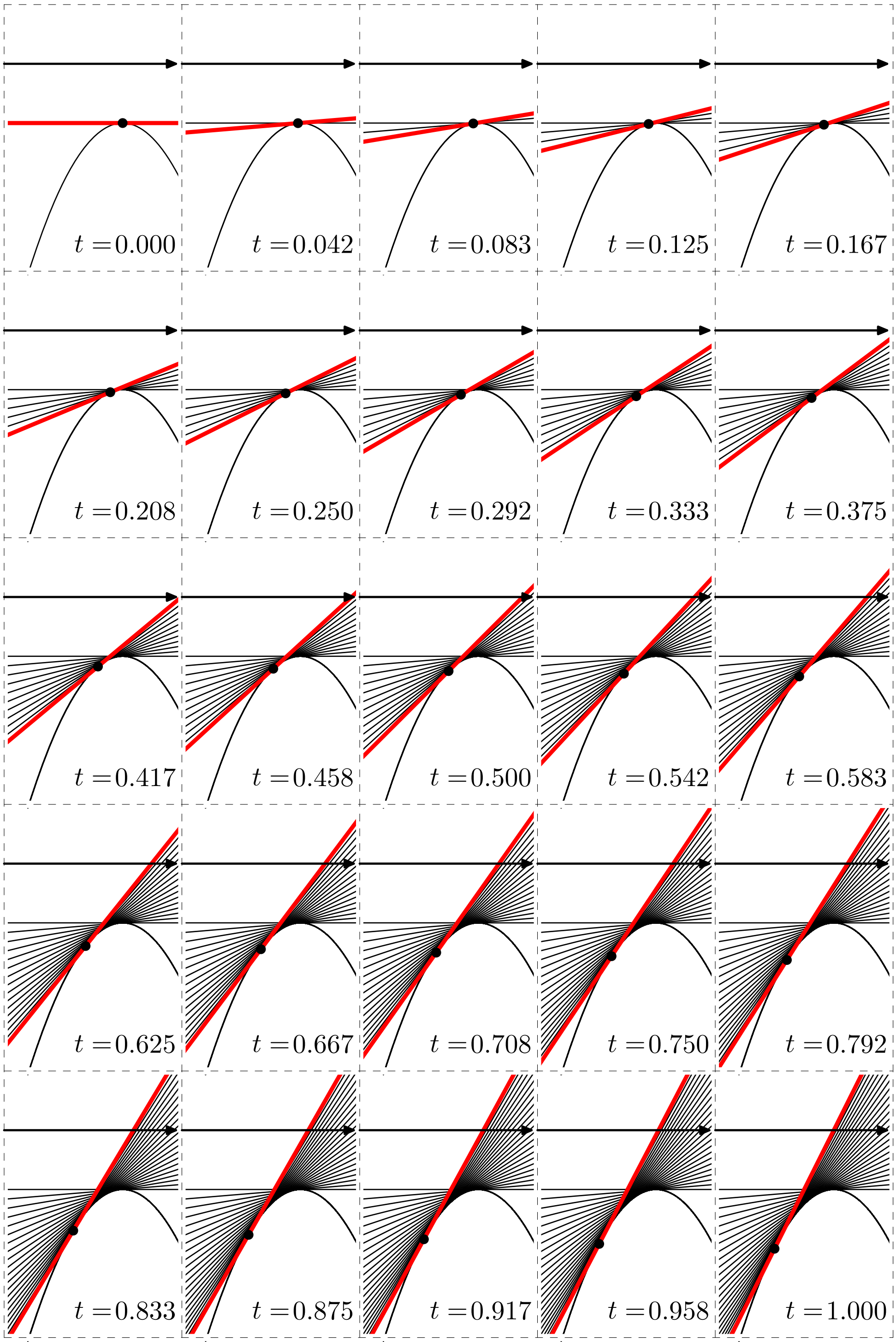
よって、この点で C と l は接する。

t を $0 \leqq t \leqq 1$ で動かすと (動く様子のパラパラ漫画は次ページ)、l の通過領域は次の図の斜線部になる。(境界を含む)



〜問 2 のパラパラ漫画〜

図の放物線は $C: y=-x^2-1$、赤い太線は $l: y=2tx+t^2-1$。
C と l は $x=-t$ の点で接している。(● は接点)



【応用】　(京大)

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような、実数 a、b の条件を ab 平面に図示せよ。

〜まずは普通の解答〜 (こういう問題は数学 I で必ずやっているはずだ。)

解 答

$$f(x) = x^2 - ax + b$$

とする。

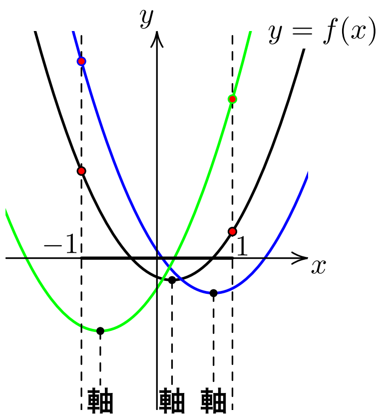
$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + b$$

放物線 $y = f(x)$ の軸は、

$$x = \frac{a}{2}$$

$f(x) = 0$ が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつのは、放物線 $y = f(x)$ が x 軸の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分と少なくとも 1 つの共有点をもつときであるから、次のようになる。

(i) $-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1 \iff -2 \leqq a \leqq 2$ のとき。



$$D = a^2 - 4b \geqq 0 \qquad \cdots①$$

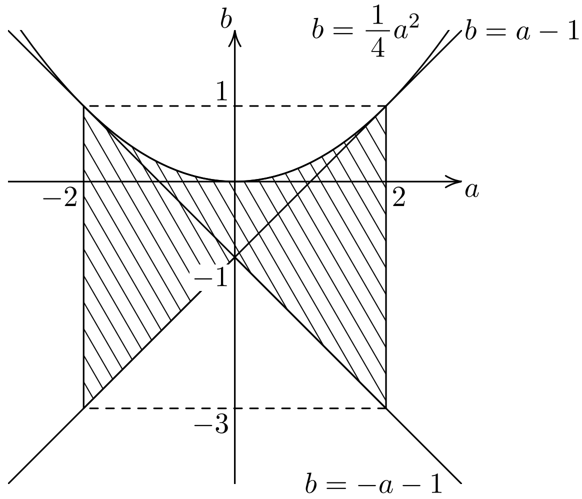
「$f(-1) \geqq 0$ または $f(1) \geqq 0$」 $\cdots②$

となればよい。(② については、図の赤丸 ● を見よ)

$$① \iff b \leqq \frac{1}{4}a^2$$

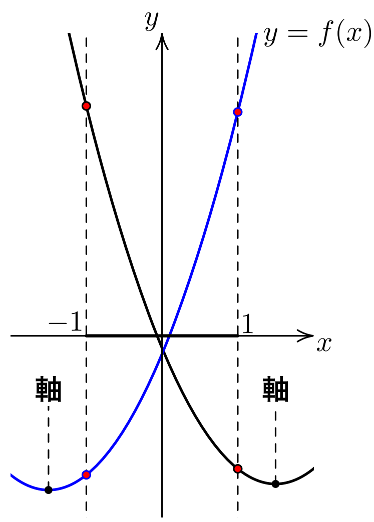
$$② \iff 1 + a + b \geqq 0 \text{ または } 1 - a + b \geqq 0$$
$$\iff b \geqq -a - 1 \text{ または } b \geqq a - 1$$

(**注.** よって、① と② を満たす (a, b) 全体は、次の図の斜線部になる。



)

(ii) $a < -2$ または $a > 2$ のとき。

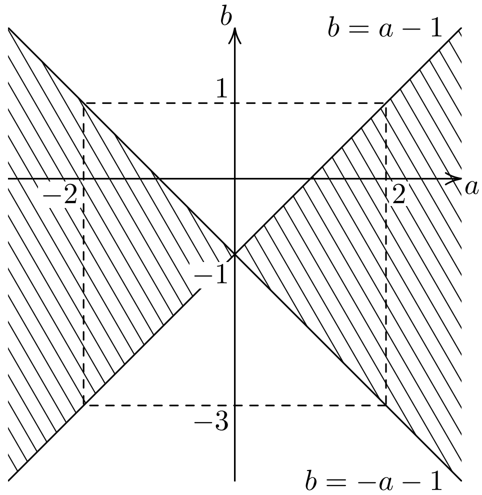


$$f(-1)f(-1) \leqq 0 \qquad \cdots ③$$

となればよい。($f(-1)$ と $f(1)$ の一方が 0 以上で他方が 0 以下と言うこと。図の赤丸●を見よ)

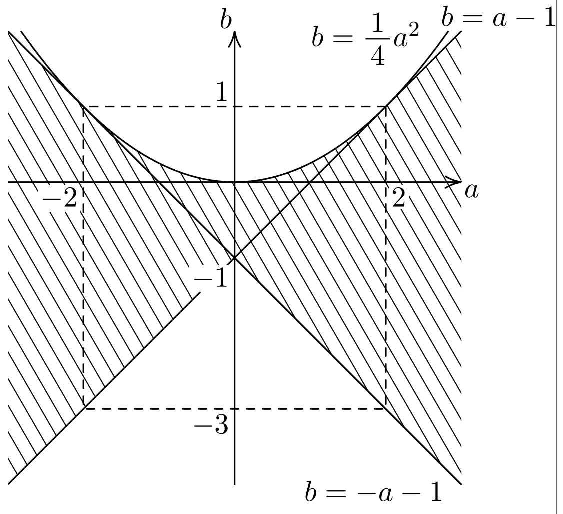
$$③ \iff (1+a+b)(1-a+b) \leqq 0$$

(**注．** ③ を満たす (a,b) 全体は、**a の場合分けの範囲を考えなければ**次の図の斜線部になる。



)

以上より、(a,b) の存在する領域は、次の図の斜線部。(境界含む)



■

〜実験しよう！〜

この答の斜線部の図形的な意味を考えてみよう。すると「包絡線」が見えてくる。(^^)v

$$x^2-ax+b=0 \qquad \cdots ④$$

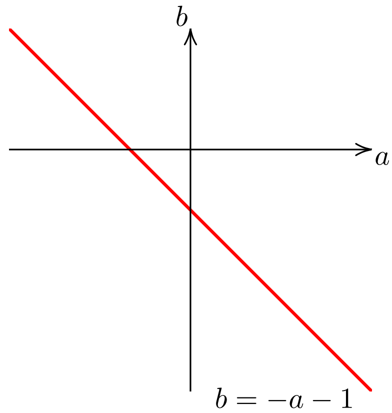
が $x=-1$ を解にもつ条件は

$$1+a+b=0$$

つまり

$$b=-a-1$$

これを ab 平面に図示すると直線になる。(次図)



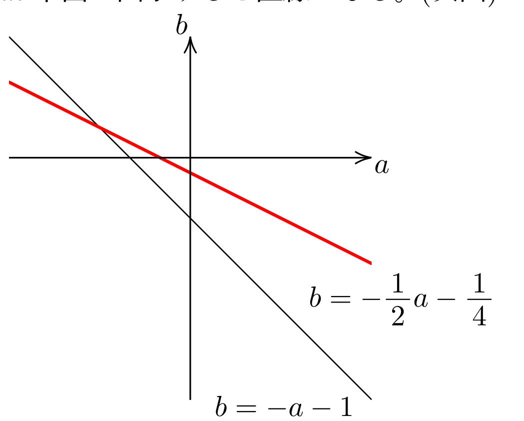
④ が $x=-\frac{1}{2}$ を解にもつ条件は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+b=0$$

つまり

$$b=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}$$

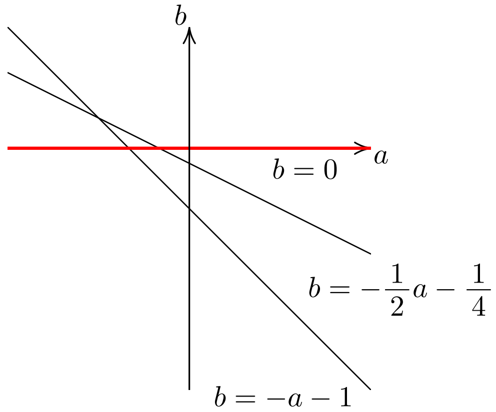
これを ab 平面に図示すると直線になる。(次図)



④ が $x=0$ を解にもつ条件は

$$b=0$$

これを ab 平面に図示すると直線になる。(次図)



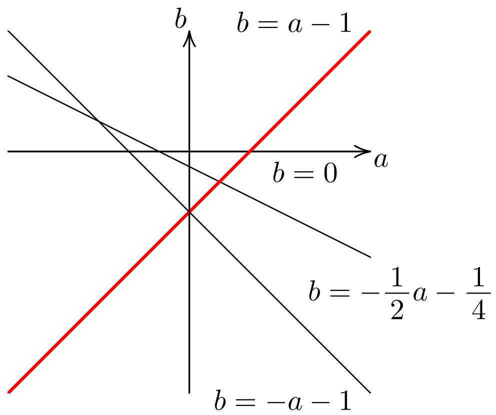
④ が $x=1$ を解にもつ条件は

$$1-a+b=0$$

つまり、

$$b=a-1$$

これを ab 平面に図示すると直線になる。(次図)



このように、**ab 平面で④ が表す図形は直線**であり、パラメーター x (ab 平面で図形を考えるので、a、b 以外の変数 x がパラメーターになる！) を $-1 \leqq x \leqq 1$ で変化させるときの、**直線④ の通過領域** が、求めるものになる。

以上のことを踏まえ、別解を作ろう。

別 解

$$x^2-ax+b=0$$
$$\iff \left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+b=0 \quad \cdots ⑤$$

これは、ab 平面で直線を表す ($\because$ a と b の一次方程式)。それを l とする。

ここで <u>ab 平面の曲線 C</u> を

$$C: \qquad -\frac{1}{4}a^2+b=0 \quad \cdots ⑥$$

とおく。

C と l の共有点の <u>a 座標</u> は、⑤ − ⑥ より

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

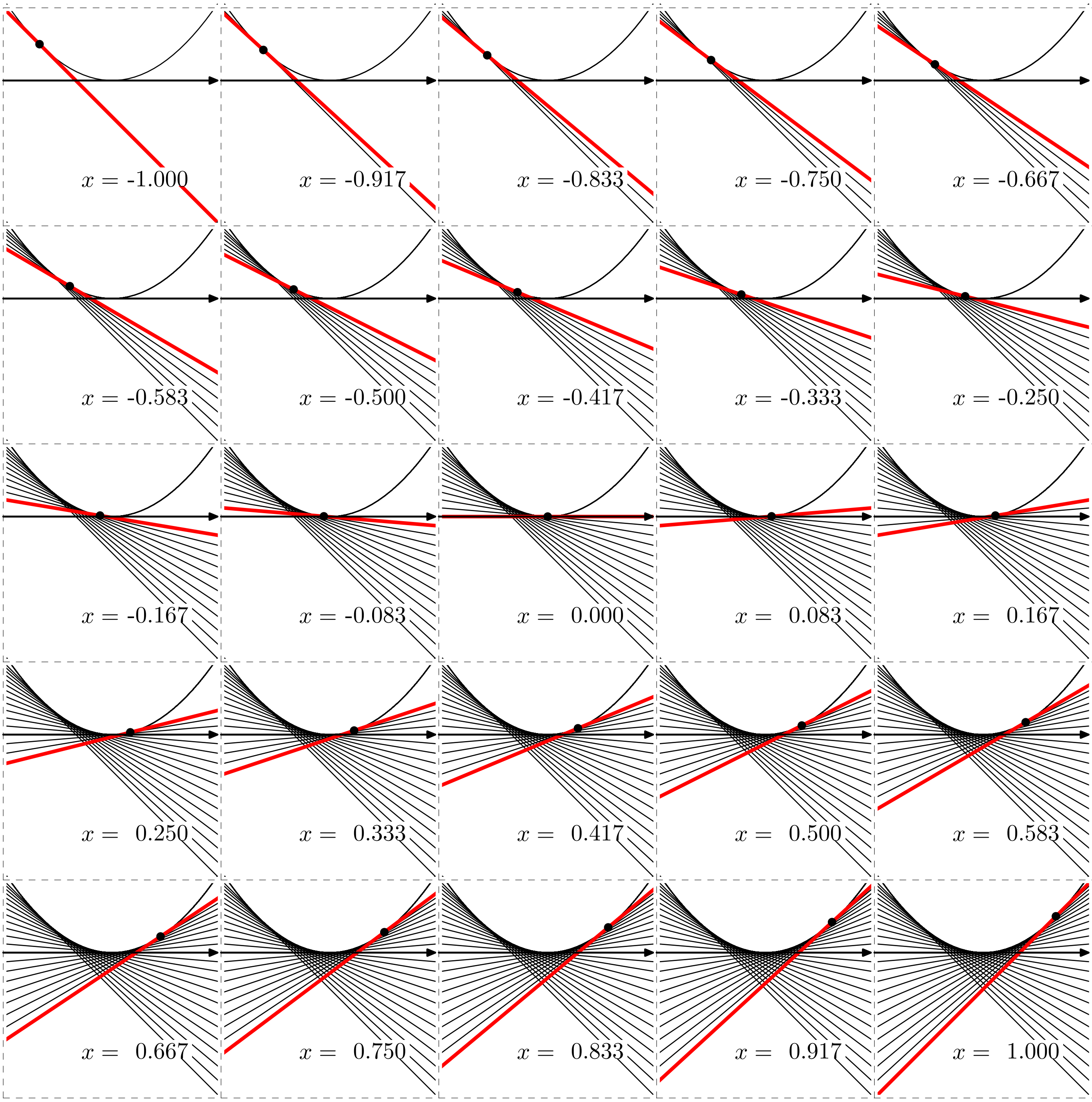
$$\therefore \quad a=2x \text{ (重解)}$$

よって、この点で C と l は接する。

x を $-1 \leqq 1$ の範囲で動かすと、(動く様子のパラパラ漫画は次ページ)、l の通過領域は p.11 **解 答** の図の斜線部になる。(境界を含む)

〜【応用】(京大) $\boxed{\text{別 解}}$ のパラパラ漫画〜

図の放物線は $C : -\dfrac{1}{4}a^2 + b = 0 \iff b = \dfrac{1}{4}a^2$、赤い太線は $l : x^2 - ax + b = 0 \iff b = xa - x^2$。座標軸は a 軸。C と l は $a = 2x$ の点で接している。(● は接点)



おしまい！